

Filiera teoretică, profilul real, specializarea științe ale naturii

- Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă zece puncte din oficiu.
- Timpul efectiv de lucru este de trei ore.

SUBIECTUL I

(30 de puncte)

- | | |
|-----------|--|
| 5p | 1. Să se arate că $\frac{1}{\log_3 2}, \frac{1}{\log_6 2}, \frac{1}{\log_{12} 2}$ sunt termeni consecutivi ai unei progresii aritmetice. |
| 5p | 2. Să se calculeze distanța dintre punctele de intersecție ale graficului funcției $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 - 8x - 9$ cu axa Ox . |
| 5p | 3. Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $2^x + 3 \cdot 2^{x-4} = 76$. |
| 5p | 4. Determinați rangul termenului care nu îl conține pe x din dezvoltarea binomului $\left(x + \frac{1}{\sqrt{x}}\right)^{21}$. |
| 5p | 5. Să se determine distanța de la punctul de intersecție a dreptelor $d_1: x + y - 2 = 0$ și $d_2: 2x + y - 3 = 0$ la dreapta de ecuație $d_3: 3x - 4y - 14 = 0$. |
| 5p | 6. Determinați măsura unghiului C a triunghiului ABC , știind că $BC = 4$, $AB = 2\sqrt{2}$ și $m(\sphericalangle BAC) = 135^\circ$ |

SUBIECTUL al II-lea

(30 de puncte)

- | | |
|-----------|--|
| 5p | 1. Fie $A(a) = \begin{pmatrix} 1+5a & 10a \\ -2a & 1-4a \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{R})$ |
| 5p | a) Să se calculeze $\det A(1)$ |
| 5p | b) Să se demonstreze ca $A(a) \cdot A(b) = A(a + b + ab)$, oricare ar fi $a, b \in \mathbb{R}$. |
| 5p | c) Determinați $a \in \mathbb{R}$ știind că $A^2(a) = A^4(1)$ |
| 5p | 2. Pe mulțimea $\mathbb{R}$ se definește legea de compoziție asociativă $x \circ y = axy + x + y$, unde a este un număr real pozitiv. |
| 5p | a) Arătați că legea de compoziție admite element neutru oricare ar fi $a > 0$. |
| 5p | b) Arătați că $G = \left(-\frac{1}{a}, +\infty\right)$ este parte stabilă a lui $\mathbb{R}$ în raport cu operația " $\circ$ ". |
| 5p | c) Pentru $a = 3$ determinați valorile reale ale lui x pentru care $x \circ x \circ x = 21$. |

SUBIECTUL al III-lea

(30 de puncte)

- | | |
|-----------|---|
| 5p | 1. Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow (0, +\infty)$, $f(x) = x + \sqrt{x^2 + 1}$. |
| 5p | a) Să se calculeze $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - 1}{x}$. |
| 5p | b) Determinați ecuația asimptotei oblice spre $+\infty$ la graficul funcției f . |
| 5p | c) Demonstrați că, pentru orice număr real $m > 0$, ecuația $f(x) = m$ are soluție unică în $\mathbb{R}$. |

2. Se consideră funcțiile $f, F : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{2 + \sqrt{x}}{2x}$ și F o primitivă a funcției f .

5p a) Arătați că orice primitivă F a funcției f este concavă pe $(0, \infty)$.

5p b) Calculați $\int \ln x \cdot f(x) dx$, $x \in (0, \infty)$.

5p c) Determinați primitiva $G : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ a funcției $g : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $g(x) = f(x) \cdot F''(x)$, pentru care $G(1) = 2$

Examenul național de bacalaureat 2026

Proba E. c)

Matematică *M_{șt-nat}*

BAREM DE EVALUARE ȘI DE NOTARE

11 decembrie 2025

Simulare

Filiera teoretică, profilul real, specializarea științe ale naturii

- Pentru orice soluție corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.
- Nu se acordă fracțiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parțiale, în limitele punctajului indicat în barem.
- Se acordă zece puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărțirea la zece a punctajului total acordat pentru lucrare.

• **SUBIECTUL I**

(30 de puncte)

1.	Scrisse numerele sub forma $\log_2 3, \log_2 6, \log_2 12$ Verifică $\log_2 3 + \log_2 12 = 2 \cdot \log_2 6 \Leftrightarrow \log_2 36 = \log_2 36$	2p 3p
2.	Determină punctele de intersecție ale graficului funcției f, cu axa $Ox : A(9,0), B(-1,0)$ Calculează $AB = x_A - x_B = 10$	3p 2p
3.	$2^x + 3 \cdot 2^{x-4} = 76 \Rightarrow 2^{x-4} (2^4 + 3) = 76 \Rightarrow 19 \cdot 2^{x-4} = 76$ $2^{x-4} = 4 \Rightarrow x = 6.$	3p 2p
4.	$T_{k+1} = C_{21}^k x^{21-k} \cdot x^{\frac{k}{2}} = C_{21}^k x^{\frac{42-3k}{2}}$ $\frac{42-3k}{2} = 0 \Rightarrow k = 14 \Rightarrow T_{15}$	2p 3p
5.	Determină punctul de intersecție al dreptelor $A(1,1) = d_1 \cap d_2$. Calculează distanța $d(A, d_3) = 3$	2p 3p
6.	$\sin A = \sin 135^\circ = \sin 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2}$ $\frac{BC}{\sin A} = \frac{AB}{\sin C} \Leftrightarrow \frac{4}{\frac{\sqrt{2}}{2}} = \frac{2\sqrt{2}}{\sin C} \Leftrightarrow \sin C = \frac{2}{4} = \frac{1}{2} \Rightarrow m(\sphericalangle C) = \frac{\pi}{6}$	2p 3p

• **SUBIECTUL al II-lea**

(30 de puncte)

1.a)	$A(1) = \begin{pmatrix} 6 & 10 \\ -2 & -3 \end{pmatrix}$ $\det A(1) = \begin{vmatrix} 6 & 10 \\ -2 & -3 \end{vmatrix} = -18 - (-20) = 2$	2p 3p
b)	$A(a) \cdot A(b) = \begin{pmatrix} 1+5a & 10a \\ -2a & 1-4a \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1+5b & 10b \\ -2b & 1-4b \end{pmatrix} =$ $\begin{pmatrix} 1+5(a+b+ab) & 10(a+b+ab) \\ -2(a+b+ab) & 1-4(a+b+ab) \end{pmatrix} = A(a+b+ab), \forall a, b \in \mathbb{R}$	3p 2p
c)	$A^2(a) = A(a) \cdot A(a) = A(a^2 + 2a), A^4(1) = A(15).$ $a^2 + 2a = 15. a_1 = -5$ și $a_2 = 3$ sunt soluțiile	3p 2p
2.a)	$x \circ e = e \circ x, \forall x \in \mathbb{R},$ $x \circ e = x \Leftrightarrow axe + x + e = x \Leftrightarrow e(ax+1) = 0, \forall x \in \mathbb{R} \Rightarrow e = 0$ este element neutru	2p 3p
b)	$(\forall) x \in G, y \in G \Leftrightarrow x > -\frac{1}{a}, y > -\frac{1}{a} \Leftrightarrow x + \frac{1}{a} > 0, y + \frac{1}{a} > 0 \Leftrightarrow \left(x + \frac{1}{a}\right) \left(y + \frac{1}{a}\right) > 0$	2p

Inspectoratul Școlar Județean Brăila

	$a > 0 \Rightarrow a \left(x + \frac{1}{a} \right) \left(y + \frac{1}{a} \right) > 0 \Rightarrow a \left(x + \frac{1}{a} \right) \left(y + \frac{1}{a} \right) - \frac{1}{a} > -\frac{1}{a} \Rightarrow x \circ y \in G$	3p
c)	$a = 3 \Rightarrow x \circ y = 3 \left(xy + \frac{1}{3}x + \frac{1}{3}y + \frac{1}{9} - \frac{1}{9} \right) = 3 \left(x + \frac{1}{3} \right) \left(y + \frac{1}{3} \right) - \frac{1}{3} \Rightarrow$ $x \circ x \circ x = 3^2 \left(x + \frac{1}{3} \right)^3 - \frac{1}{3}, \forall x \in G \Rightarrow$ $x \circ x \circ x = 21 \Leftrightarrow 3^2 \left(x + \frac{1}{3} \right)^3 - \frac{1}{3} = 21 \Rightarrow \left(x + \frac{1}{3} \right)^3 = \left(\frac{4}{3} \right)^3 \Rightarrow x = 1$ soluție unică	2p 3p

• SUBIECTUL al III-lea

(30 de puncte)

1.a)	$f'(x) = 1 + \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$ $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x} = f'(0) = 1 + 0 = 1$	3p 2p
b)	$m = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \sqrt{1 + \frac{1}{x^2}} \right) = 2$ $n = \lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - 2x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2+1} - x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{\sqrt{x^2+1} + x} = 0$ $y = 2x$ este ecuația asimptotei oblice la graficul funcției spre $+\infty$	2p 3p
c)	$f'(x) = \frac{\sqrt{x^2+1} + x}{\sqrt{x^2+1}} > 0 \Rightarrow f$ strict crescătoare pe $\mathbb{R} \Rightarrow f$ injectivă $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty, \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0, f$ strict crescătoare pe $\mathbb{R}$ și continuă pe $\mathbb{R}$ $\Rightarrow \text{Im}(f) = (0, +\infty) \Rightarrow f$ surjectivă $\Rightarrow f$ bijectivă $\Rightarrow f(x) = m$ are soluție unică oricare ar fi $m \in (0, \infty)$	2p 3p
2.a)	F primitivă a lui $f \Rightarrow F$ derivabilă și $F'(x) = f(x) \Rightarrow F''(x) = f'(x)$ oricare ar fi $x \in (0, \infty)$ $\Rightarrow F''(x) = \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{2\sqrt{x}} \right)' = -\left(\frac{1}{x^2} + \frac{1}{4x\sqrt{x}} \right) < 0$, oricare ar fi $x \in (0, \infty) \Rightarrow F$ concavă pe $(0, \infty)$	2p 3p
b)	Pentru $\int \ln x \cdot \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{2\sqrt{x}} \right) dx = \int \frac{\ln x}{x} dx + \int \frac{\ln x}{2\sqrt{x}} dx = \int \ln x (\ln x)' dx + \int \ln x \cdot (\sqrt{x})' dx$ $= \frac{1}{2} \ln^2 x + \ln x \cdot \sqrt{x} - \int \frac{1}{\sqrt{x}} dx = \frac{1}{2} \ln^2 x + \ln x \cdot \sqrt{x} - 2\sqrt{x} + C$	2p 3p
c)	Dacă F este o primitivă a funcției f atunci F derivabilă și $F'(x) = f(x) \Rightarrow F''(x) = f'(x)$ $G(x) = \int g(x) dx = \int f(x) \cdot f'(x) dx = \frac{1}{2} (f^2(x)) + C$ $G(x) = \frac{1}{2} (f^2(x)) + \frac{7}{8}$	2p 3p