

Examenul național de bacalaureat 2025 – simulare județeană

Proba E. c)

Matematică M_mate-info

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică-informatică

Filiera vocațională, profilul militar, specializarea matematică-informatică

- Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.
- Timpul de lucru efectiv este de 3 ore

SUBIECTUL I – Scrieți, pe foaia de examen, rezolvările complete.

(30 de puncte)

- 5p 1. Arătați că $\lg(2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6) - 1 = 3\lg 2 + 2\lg 3$.
- 5p 2. Se consideră funcțiile $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = mx^2 + 2x - 3$, unde m este un număr real și $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $g(x) = x + 3$. Dacă M este punctul în care graficul funcției g intersectează axa Ox , atunci determinați numărul real m astfel încât punctul M să aparțină și graficului funcției f .
- 5p 3. Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $\sqrt{x} - \sqrt{x-3} = 1$.
- 5p 4. Calculați probabilitatea ca, alegând un număr din mulțimea numerelor naturale de trei cifre, acesta să aibă suma cifrelor egală cu 3.
- 5p 5. Se consideră triunghiul ABC , $\alpha \in (0, +\infty)$, punctele M , N și P astfel încât $\overrightarrow{AB} = \alpha \overrightarrow{AM}$, $\overrightarrow{BC} = \alpha \overrightarrow{BN}$ și $\overrightarrow{CA} = \alpha \overrightarrow{CP}$. Demonstrați că $\overrightarrow{AN} + \overrightarrow{BP} + \overrightarrow{CM} = \vec{0}$.
- 5p 6. Arătați că $\sin \frac{\pi}{6} \cos \frac{\pi}{3} - \sin \frac{5\pi}{6} \cos \frac{5\pi}{3} = 0$.

SUBIECTUL al II-lea – Scrieți, pe foaia de examen, rezolvările complete.

(30 de puncte)

1. Se consideră matricea $A(m) = \begin{pmatrix} m+1 & -2 & 1 \\ -2 & 1 & m+1 \\ 1 & m+1 & -2 \end{pmatrix}$ și sistemul de ecuații $\begin{cases} (m+1)x - 2y + z = m \\ -2x + y + (m+1)z = 3m+3 \\ x + (m+1)y - 2z = 2m-3 \end{cases}$, unde m este un număr real.
- 5p a) Arătați că $\det(A(0)) = 0$.
- 5p b) Demonstrați că $A(m)$ este inversabilă dacă și numai dacă $m \neq 0$.
- 5p c) Pentru $m \neq 0$, demonstrați că singura soluție a sistemului de ecuații este $x = 1$, $y = 2$ și $z = 3$.
2. Pe mulțimea $M = [-1, +\infty)$ se definește legea de compoziție asociativă $x * y = xy + x + y$, pentru orice $x, y \in M$.
- 5p a) Verificați dacă $x * y = (x+1)(y+1) - 1$, pentru orice $x, y \in M$.
- 5p b) Dacă $x \in M$ și $x \neq -1$, atunci demonstrați că există $x' \in M$ și $x \neq -1$, astfel încât $x * x' = 0$.
- 5p c) Determinați $x \in M$ pentru care $x * x * x * x = x$.

SUBIECTUL al III-lea – Scrieți, pe foaia de examen, rezolvările complete.

(30 de puncte)

1. Se consideră funcția $f: (0,1) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = -x \ln x - (1-x) \ln(1-x)$.
- 5p a) Verificați dacă $f'(x) = \ln \frac{1-x}{x}$, oricare ar fi $x \in (0,1)$.
- 5p b) Arătați că $\lim_{x \searrow 0} f(x) = 0$.

- 5p** c) Dacă $a, b \in (0, 1)$ și $a + b = 1$, atunci demonstrați că $a \ln a + b \ln b \geq \ln \frac{1}{2}$.
2. Pentru orice număr natural nenul n , se consideră funcția $f_n : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$, $f_n(x) = x^n \sqrt{x+1}$, iar șirul $(I_n)_{n \geq 1}$, este definit prin $I_n = \int_0^1 f_n(x) dx$.
- 5p** a) Arătați că $\int_0^1 \frac{f_2(x)}{\sqrt{x+1}} dx = \frac{1}{3}$.
- 5p** b) Arătați că $I_1 = \frac{4(\sqrt{2} + 1)}{15}$.
- 5p** c) Demonstrați că $(2n + 3)I_n + 2nI_{n-1} = 4\sqrt{2}$, pentru orice număr natural nenul n .

SUBIECTUL I

(30 de puncte)

1.	$\lg(2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6) - 1 = \lg(2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6) - \lg 10 = \lg \frac{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6}{10} =$ $= \lg \frac{2^4 \cdot 3^2 \cdot 5}{2 \cdot 5} = \lg 2^3 \cdot 3^2 = 3 \lg 2 + 2 \lg 3.$	2p 3p
2.	Abscisa punctului M este soluția ecuației $g(x) = 0 \Leftrightarrow x = -3$ Punctul $M(-3, 0)$ aparține graficului funcției $f \Leftrightarrow f(-3) = 0 \Leftrightarrow 9m - 9 = 0 \Leftrightarrow m = 1.$	2p 3p
3.	$\sqrt{x} - \sqrt{x-3} = 1 \Leftrightarrow \sqrt{x} = \sqrt{x-3} + 1 \Leftrightarrow x = x - 3 + 2\sqrt{x-3} + 1 \Leftrightarrow$ $\sqrt{x-3} = 1 \Leftrightarrow x = 4,$ care convine.	2p 3p
4.	Numărul cazurilor posibile este 900. Pentru că $3 = 3 + 0 + 0 = 2 + 1 + 0 = 1 + 1 + 1$, cazurile favorabile sunt 300, 210, 201, 120, 102, 111 deci sunt 6 de cazuri favorabile. $p = \frac{\text{nr. cazuri favorabile}}{\text{nr. cazuri posibile}} = \frac{6}{900} = \frac{1}{150}$	2p 3p
5.	$\overrightarrow{AN} + \overrightarrow{BP} + \overrightarrow{CM} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BN} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CP} + \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AM} =$ $= \frac{\alpha+1}{\alpha}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CA}) = \frac{\alpha+1}{\alpha}(\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CA}) = \vec{0}.$	2p 3p
6.	$\sin \frac{5\pi}{6} = \sin \left(\pi - \frac{5\pi}{6} \right) = \sin \frac{\pi}{6}; \cos \frac{5\pi}{3} = \cos \left(2\pi - \frac{\pi}{3} \right) = \cos \frac{\pi}{3}$ $\sin \frac{\pi}{6} \cos \frac{\pi}{3} - \sin \frac{5\pi}{6} \cos \frac{5\pi}{3} = \sin \frac{\pi}{6} \cos \frac{\pi}{3} - \sin \frac{\pi}{6} \cos \frac{\pi}{3} = 0$	3p 2p

SUBIECTUL al II-lea

(30 de puncte)

1.	a) $\det(A(0)) = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 1 \\ -2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{vmatrix} =$ $= -2 - 2 - 2 - 1 - 1 + 8 = 0$	3p 2p
	b) $\det(A(m)) = \begin{vmatrix} m+1 & -2 & 1 \\ -2 & 1 & m+1 \\ 1 & m+1 & -2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} m & m & m \\ -2 & 1 & m+1 \\ 1 & m+1 & -2 \end{vmatrix} = m \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -2 & 1 & m+1 \\ 1 & m+1 & -2 \end{vmatrix} =$ $= m \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 3 & m+3 \\ 1 & m & -3 \end{vmatrix} = -m(m^2 + 3m + 9)$ $\exists A^{-1}(m) \Leftrightarrow \det(A(m)) \neq 0 \Leftrightarrow m \neq 0$	3p 2p
	c) Pentru $x=1, y=2$ și $z=3$ sistemul este echivalent cu $\begin{cases} m+1-4+3=m \\ -2+2+3m+3=3m+3, \\ 1+2m+2-6=2m-3 \end{cases}$ egalitățile sunt adevărate, deci $x=1, y=2$ și $z=3$ este o soluție a sistemului. $m \neq 0 \Rightarrow \det(A(m)) \neq 0$ și rezultă, conform teoremei lui Cramer că singura soluție a sistemului de ecuații este $x=1, y=2$ și $z=3$.	2p 3p
2.	a) $(x+1)(y+1) - 1 = xy + x + y + 1 - 1 =$	3p
	$= x * y$ pentru orice $x, y \in M.$	2p

	b) $x \in M$ și $x \neq -1$ astfel încât $x * x' = 0 \Leftrightarrow (x+1)(x'+1) - 1 = 0 \Leftrightarrow x' = \frac{1}{x+1} - 1$	2p
	$x \in M$ și $x \neq -1 \Rightarrow x+1 > 0$, rezultă că există $x' \in M$ și $x' \neq -1$, astfel încât $x * x' = 0$.	3p
	c) $x * x * x * x = x \Leftrightarrow (x+1)^4 - 1 = x \Leftrightarrow$	2p
	$x(x+1)(x^2+3x+3) = 0 \Leftrightarrow x = -1 \in M$ sau $x = 0 \in M$ sau $x = -\frac{3}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i \notin M$ sau $x = -\frac{3}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i \notin M$	3p

SUBIECTUL al III-lea

(30 de puncte)

1.	a) $f'(x) = (-x)' \ln x - x(\ln x)' - (1-x)' \ln(1-x) - (1-x)(\ln(1-x))' =$ $= -\ln x + \ln(1-x) = \ln \frac{1-x}{x}$	3p												
	b) $\lim_{x \searrow 0} x \ln x = \lim_{x \searrow 0} \frac{(\ln x)'}{\left(\frac{1}{x}\right)'} = \lim_{x \searrow 0} (-x) = 0 \Rightarrow$ $\lim_{x \searrow 0} f(x) = \lim_{x \searrow 0} (-x \ln x - (1-x) \ln(1-x)) = 0.$	3p												
	c) $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = \frac{1}{2}$; $\lim_{x \searrow 0} f'(x) = -\infty ; \lim_{x \nearrow 1} f'(x) = +\infty$ În consecință rezultă că funcția f este strict crescătoare pe intervalul $\left(0, \frac{1}{2}\right]$ și strict descrescătoare pe intervalul $\left[\frac{1}{2}, 0\right)$, rezultă că $f(a) \leq f\left(\frac{1}{2}\right), \forall a \in (0,1) \Rightarrow$	<table><tr><td>x</td><td>0</td><td>$\frac{1}{2}$</td><td>1</td></tr><tr><td>$f'(x)$</td><td>$+\infty$</td><td>+++++++ 0</td><td>----- $-\infty$</td></tr><tr><td>f</td><td>$\nearrow \nearrow \nearrow \nearrow$</td><td>$\ln 2$</td><td>$\searrow \searrow \searrow \searrow$</td></tr></table>	x	0	$\frac{1}{2}$	1	$f'(x)$	$+\infty$	+++++++ 0	----- $-\infty$	f	$\nearrow \nearrow \nearrow \nearrow$	$\ln 2$	$\searrow \searrow \searrow \searrow$
x	0	$\frac{1}{2}$	1											
$f'(x)$	$+\infty$	+++++++ 0	----- $-\infty$											
f	$\nearrow \nearrow \nearrow \nearrow$	$\ln 2$	$\searrow \searrow \searrow \searrow$											
2.	a) $\int_0^1 \frac{f_2(x)}{\sqrt{x+1}} dx = \int_0^1 x^2 dx =$ $= \frac{x^3}{3} \Big _0^1 = \frac{1}{3}.$	3p												
	b) $I_1 = \int_0^1 x\sqrt{x+1} dx = \int_0^1 [(x+1)-1]\sqrt{x+1}(x+1)' dx = \int_1^2 (x^{\frac{3}{2}} - x^{\frac{1}{2}}) dx =$ $= \left(\frac{2}{5} x^{\frac{5}{2}} \sqrt{x} - \frac{2}{3} x \sqrt{x}\right) \Big _1^2 = \frac{4(\sqrt{2}+1)}{15}.$	3p												
	c) $I_n = \frac{2}{3} \int_0^1 x^n \left((x+1)^{\frac{3}{2}}\right)' dx = \frac{2}{3} \left[x^n (\sqrt{x+1})^3 \Big _0^1 - n \int_0^1 x^{n-1} (x+1) \sqrt{x+1} dx \right] =$ $= \frac{2}{3} (2\sqrt{2} - nI_n - nI_{n-1}) \Rightarrow (2n+3)I_n + 2nI_{n-1} = 4\sqrt{2}, \forall n \in \mathbb{N}^*$	2p												
			3p											