

Examenul național de bacalaureat 2026
Proba E. c)
Matematică $M_mate-info$

Simulare

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică-informatică
Filiera vocațională, profilul militar, specializarea matematică-informatică

- Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă zece puncte din oficiu.
- Timpul de lucru efectiv este de trei ore.

SUBIECTUL I

(30 de puncte)

- | | |
|-----------|--|
| 5p | 1. Arătați că numărul complex $1+3i$ este soluție a ecuației $x^2 - 2x + 10 = 0$. |
| 5p | 2. Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = 2x^2 - mx + 2$, unde $m \in \mathbb{R}$. Determinați numerele reale m pentru care graficul funcției f nu intersectează axa Ox . |
| 5p | 3. Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $\sqrt{2x^2 - x + 6} = x\sqrt{3}$. |
| 5p | 4. Calculați probabilitatea ca, alegând un număr din mulțimea numerelor naturale de trei cifre, acesta să fie divizibil cu 9. |
| 5p | 5. Se consideră pătratul $ABCD$ cu $AB=1$. Calculați modulul vectorului $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD}$. |
| 5p | 6. Se consideră triunghiul ABC cu $AB=4$, $AC=5$ și $A = \frac{\pi}{3}$. Calculați lungimea înălțimii din A a triunghiului ABC . |

SUBIECTUL II

(30 de puncte)

- | | |
|-----------|--|
| 5p | 1. Se consideră matricea $A(a) = \begin{pmatrix} a & 2 & 1 \\ 2 & a & 1 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix}$ și sistemul de ecuații $\begin{cases} ax + 2y + z = 0 \\ 2x + ay + z = 0 \\ x - y + 3z = 0 \end{cases}$, unde a este număr real. |
| 5p | a) Arătați că $\det(A(1)) = -9$. |
| 5p | b) Determinați numerele reale a pentru care sistemul de ecuații are soluții nenule. |
| 5p | c) Pentru $a = -2$, arătați că sistemul de ecuații are două soluții de forma (x_0, y_0, z_0) cu proprietatea că $x_0^2 + 2y_0^2 + 3z_0^2 = 6$. |
| | 2. Pe mulțimea $G = (0, 1)$ se definește legea de compoziție asociativă $x \circ y = \frac{xy}{2xy - x - y + 1}$. |
| 5p | a) Arătați că $\frac{1}{2}$ este elementul neutru al legii „ $\circ$ ”. |
| 5p | b) Demonstrați că orice element din mulțimea G este simetrizabil în raport cu legea „ $\circ$ ”. |
| 5p | c) Determinați $x \in G$ pentru care $x \circ x \circ x = 0, (1)$. |

SUBIECTUL III

(30 de puncte)

1. Se consideră funcția $f: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{\ln x}{\ln(x+1)}$.

5p a) Arătați că $f'(x) = \frac{(x+1)\ln(x+1) - x \ln x}{x(x+1)\ln^2(x+1)}$, pentru orice $x \in (0, +\infty)$.

5p b) Determinați ecuația asimptotei orizontale spre $+\infty$ la graficul funcției f .

5p c) Determinați mulțimea B cu proprietatea că funcția $g: (0, +\infty) \rightarrow B$, $g(x) = f(x)$ este bijectivă.

2. Se consideră funcțiile $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \arctg 2x$ și $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $g(x) = \frac{2}{1+4x^2}$.

5p a) Arătați că funcția f este o primitivă a funcției g .

5p b) Demonstrați că orice primitivă a funcției f este funcție convexă.

5p c) Determinați primitiva F a funcției f cu proprietatea că $F\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\pi}{8}$.

Examenul național de bacalaureat 2026

Proba E. c)

Matematică *M_mate-info*

BAREM DE EVALUARE SI DE NOTARE

Simulare

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică-informatică

Filiera vocațională, profilul militar, specializarea matematică-informatică

- Pentru orice soluție corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.
- Nu se acordă fracțiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parțiale, în limitele punctajului indicat în barem.
- Se acordă zece puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărțirea la zece a punctajului total acordat pentru lucrare.

SUBIECTUL I

(30 de puncte)

1.	$\Delta = -36 < 0 \Rightarrow$ soluțiile ecuației sunt $x_{1,2} = \frac{2 \pm i\sqrt{36}}{2}$	3p
	Observăm că $x_1 = 1 + 3i$ și $x_2 = 1 - 3i$, deci $1 + 3i$ este soluție a ecuației din enunț	2p
2.	$\Delta = m^2 - 16$	2p
	$G_f \cap Ox = \emptyset \Leftrightarrow$ ecuația $f(x) = 0$ nu are soluții reale $\Leftrightarrow \Delta < 0 \Leftrightarrow m \in (-4, 4)$	3p
3.	$\left(\sqrt{2x^2 - x + 6}\right)^2 = \left(x\sqrt{3}\right)^2$ de unde obținem $x^2 + x - 6 = 0$	3p
	$x^2 + x - 6 = 0 \Rightarrow x \in \{-3, 2\}$, din care $x = 2$ convine.	2p
4.	Sunt 900 de numere naturale cu trei cifre, deci numărul cazurilor posibile este 900	2p
	Numărul celor divizibile cu 9 este dat de numărul valorilor $n \in \mathbb{N}$ care au proprietatea că $100 \leq 9n \leq 999 \Leftrightarrow 11, (1) \leq n \leq 111$, deci avem 100 de cazuri favorabile. Probabilitatea cerută este $\frac{100}{900} = \frac{1}{9}$	3p
5.	$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD} = (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}) + \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AC} = 2\overrightarrow{AC}$	3p
	$ \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD} = 2\overrightarrow{AC} = 2AC = 2\sqrt{2}$	2p
6.	Aria triunghiului ABC este $S = \frac{AB \cdot AC \cdot \sin A}{2} = \frac{20\sqrt{3}}{4} = 5\sqrt{3}$	2p
	$BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2AB \cdot AC \cdot \cos A \Rightarrow BC = \sqrt{21}$ $S = \frac{BC \cdot h_A}{2} \Rightarrow h_A = \frac{2S}{BC} \Rightarrow h_A = \frac{10\sqrt{7}}{7}$	3p

SUBIECTUL II

(30 de puncte)

1.a)	$\det(A(1)) = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 3 \end{vmatrix} =$	2p
	$= 3 - 2 + 2 - 1 + 1 - 12 = -9$	3p

b)	$\det(A(a)) = \begin{vmatrix} a & 2 & 1 \\ 2 & a & 1 \\ 1 & -1 & 3 \end{vmatrix} = 3a^2 - 2 + 2 - a + a - 12 = 3(a^2 - 4)$ Sistemul de ecuații are soluții nenule dacă și numai dacă $\det(A(a)) = 0$, de unde obținem $a \in \{-2, 2\}$	2p 3p
c)	Pentru $a = -2$, sistemul de ecuații devine $\begin{cases} -2x + 2y + z = 0 \\ 2x - 2y + z = 0 \\ x - y + 3z = 0 \end{cases}$ și are o infinitate de soluții de forma $(\alpha, \alpha, 0)$, unde $\alpha \in \mathbb{R}$ $\alpha^2 + 2\alpha^2 + 3 \cdot 0^2 = 6$ conduce la $\alpha = \pm\sqrt{2}$, deci $(x_0, y_0, z_0) \in \{(\sqrt{2}, \sqrt{2}, 0); (-\sqrt{2}, -\sqrt{2}, 0)\}$	3p 2p
2.a)	Pentru orice $x \in G$ avem $x \circ \frac{1}{2} = \frac{x \cdot \frac{1}{2}}{2 \cdot x \cdot \frac{1}{2} - x - \frac{1}{2} + 1} = \frac{x \cdot \frac{1}{2}}{\frac{1}{2}} = x$ $\frac{1}{2} \circ x = \frac{\frac{1}{2} \cdot x}{2 \cdot \frac{1}{2} \cdot x - \frac{1}{2} - x + 1} = \frac{\frac{1}{2} \cdot x}{\frac{1}{2}} = x$ deci $\frac{1}{2} \circ x = x \circ \frac{1}{2} = x$, pentru orice $x \in G$, adică $\frac{1}{2}$ este elementul neutru al legii „$\circ$”	2p 3p
b)	$x \circ x' = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \frac{xx'}{2xx' - x - x' + 1} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow 2xx' = 2xx' - x - x' + 1 \Leftrightarrow x' = 1 - x$ Observând că pentru orice $x \in (0, 1)$ avem $1 - x \in (0, 1)$ și că legea „$\circ$” este comutativă, deducem că pentru orice $x \in G$, există $x' = 1 - x \in G$ astfel încât $x \circ x' = x' \circ x = \frac{1}{2}$, adică toate elementele din G sunt simetrizabile	2p 3p
c)	Pentru orice $x, y \in G$ avem $x \circ y = \frac{xy}{xy + (x-1)(y-1)} = \frac{1}{1 + \left(\frac{1}{x} - 1\right)\left(\frac{1}{y} - 1\right)}$ $x \circ x = \frac{1}{1 + \left(\frac{1}{x} - 1\right)^2}$ și $x \circ x \circ x = (x \circ x) \circ x = \frac{1}{1 + \left(\frac{1}{x \circ x} - 1\right)\left(\frac{1}{x} - 1\right)} = \frac{1}{1 + \left(\frac{1}{x} - 1\right)^3}$ $x \circ x \circ x = 0, (1) \Leftrightarrow \frac{1}{1 + \left(\frac{1}{x} - 1\right)^3} = \frac{1}{9} \Leftrightarrow \left(\frac{1}{x} - 1\right)^3 = 8 \Leftrightarrow \frac{1}{x} - 1 = 2 \Leftrightarrow x = \frac{1}{3} \in G$	3p 2p

SUBIECTUL III
(30 de puncte)

1.a)	$f'(x) = \left(\frac{\ln x}{\ln(x+1)} \right)' = \frac{(\ln x)' \cdot \ln(x+1) - \ln x \cdot (\ln(x+1))'}{\ln^2(x+1)} = \frac{\frac{\ln(x+1)}{x} - \frac{\ln x}{x+1}}{\ln^2(x+1)} =$ $= \frac{(x+1)\ln(x+1) - x\ln x}{x(x+1)\ln^2(x+1)}$	3p 2p
------	---	---------------------

b)	Folosind regula lui L'Hospital, avem $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{\ln(x+1)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{1}{x}}{\frac{1}{x+1}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x+1}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right) = 1$ Dreapta de ecuație $y=1$ este asimptotă orizontală spre $+\infty$ la graficul funcției f	3p 2p
c)	g este funcție biectivă $\Leftrightarrow$ funcția g este injectivă și surjectivă Considerăm funcția $h: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $h(x) = (x+1)\ln(x+1) - x \ln x$. Evident h este derivabilă și $h'(x) = 1 \cdot \ln(x+1) + (x+1) \cdot \frac{1}{x+1} - 1 \cdot \ln x - x \cdot \frac{1}{x} = \ln(x+1) - \ln x > 0, \text{ pentru orice } x \in (0, +\infty),$ deci h este funcție strict crescătoare. Deoarece $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} x \ln x = \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \frac{\ln x}{\frac{1}{x}} = \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}} = \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} (-x) = 0$, avem $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} h(x) = \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} ((x+1)\ln(x+1) - x \ln x) = 0$, prin urmare $h(x) > 0$, oricare ar fi $x \in (0, +\infty)$ Cum $x(x+1)\ln^2(x+1) > 0, \forall x \in (0, +\infty)$, deducem că $f'(x) > 0, \forall x \in (0, +\infty)$, prin urmare f este funcție strict crescătoare. Rezultă că f este funcție injectivă, deci funcția g este injectivă Deoarece funcția f este strict crescătoare și continuă, iar $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 1$ și $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} f(x) = \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \left(\ln x \cdot \frac{1}{\ln(x+1)} \right) = (-\infty) \cdot (+\infty) = -\infty, \text{ deducem că } \text{Im}(f) = (-\infty, 1)$ Așadar, g este funcție surjectivă $\Leftrightarrow B = \text{Im}(f) \Leftrightarrow B = (-\infty, 1)$	3p 2p
2.a)	Funcția f este derivabilă pe $\mathbb{R}$ (este compusa a două funcții derivabile) $f'(x) = (\arctg 2x)' = \frac{1}{1+(2x)^2} \cdot (2x)' = \frac{2}{1+4x^2} = g(x), \text{ pentru orice } x \in \mathbb{R}$	2p 3p
b)	Dacă F este o primitivă a lui f, atunci F este derivabilă și $F' = f$, deci $F'' = f' = g$ Așadar, funcția F este de două ori derivabilă și $F''(x) = \frac{2}{1+4x^2} > 0$, pentru orice $x \in \mathbb{R}$, prin urmare funcția F este convexă	2p 3p
c)	Integrând prin părți, avem succesiv $\int f(x) dx = \int 1 \cdot \arctg 2x dx = x \cdot \arctg 2x - \int x \cdot \frac{2}{1+4x^2} dx = x \cdot \arctg 2x - \frac{1}{4} \int \frac{8x}{1+4x^2} dx,$ de unde obținem $\int f(x) dx = x \cdot \arctg 2x - \frac{1}{4} \ln(1+4x^2) + C$ Rezultă $F(x) = x \cdot \arctg 2x - \frac{1}{4} \ln(1+4x^2) + k$, unde $k \in \mathbb{R}$ $F\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\pi}{8} \Leftrightarrow \frac{1}{2} \cdot \frac{\pi}{4} - \frac{1}{4} \ln 2 + k = \frac{\pi}{8} \Leftrightarrow k = \frac{\ln 2}{4}$ Primitiva căutată este funcția $F: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $F(x) = x \cdot \arctg 2x - \frac{1}{4} \ln(1+4x^2) + \frac{\ln 2}{4}$	3p 2p