

Examenul național de bacalaureat 2026

Proba E. c)

Matematică $M_{\text{șt-nat}}$

Simulare

Filiera teoretică, profilul real, specializarea științe ale naturii

- Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă zece puncte din oficiu.
- Timpul de lucru efectiv este de trei ore.

SUBIECTUL I (30 de puncte)

- 5p** 1. Să se arate că numărul $A = \log_3 27 + \log_{\frac{1}{2}} \frac{1}{16} + \sqrt[3]{125}$ este un număr natural.
- 5p** 2. Să se determine valoarea minimă a funcției $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = 6x^2 - 2x + 4$.
- 5p** 3. Să se rezolve în mulțimea numerelor reale ecuația $25^x + 3 \cdot 5^x = 4$.
- 5p** 4. Să se determine probabilitatea ca, alegând un element din mulțimea $\{\sqrt{n} \mid n \in \mathbb{N}, n < 100\}$, acesta să fie număr irațional.
- 5p** 5. În sistemul cartezian de coordonate xOy se dau punctele $A(2, -1)$, $B(-1, 1)$, $C(1, 3)$ și $D(a, 4)$, unde $a \in \mathbb{R}$. Să se determine valorile reale ale lui a pentru care dreptele AC și BD sunt perpendiculare.
- 5p** 6. Să se calculeze $\operatorname{tg}\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$, știind că $x \in \mathbb{R}$ și $\operatorname{tg} x = \frac{1}{3}$.

SUBIECTUL al II – lea

(30 de puncte)

1. Se consideră matricea $A(a) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & a \\ 1 & 9 & a^2 \end{pmatrix}$ și sistemul de ecuații $\begin{cases} x + y + z = 1 \\ x + 3y + az = 1 \\ x + 9y + a^2z = 1 \end{cases}$, unde a este un număr real.
- 5p** a) Arătați că $\det A(2) = -2$.
- 5p** b) Determinați mulțimea numerelor reale a pentru care matricea $A(a)$ este inversabilă.
- 5p** c) Pentru $a \in \mathbb{R} - \{1; 3\}$, rezolvați sistemul de ecuații.
2. Pe mulțimea numerelor întregi se definește legea de compoziție asociativă $x * y = xy - 4x - 4y + 20$.
- 5p** a) Demonstrați că $x * y = (x - 4)(y - 4) + 4$, pentru orice numere întregi x și y .
- 5p** b) Determinați elementele simetrizabile ale mulțimii $\mathbb{Z}$ în raport cu legea „ $*$ ”.
- 5p** c) Calculați $(-2026) * (-2025) * \dots * 2025 * 2026$.

SUBIECTUL al III – lea

(30 de puncte)

1. Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{x^3 + x^2 + 1}{x^2 + 1}$.
- 5p** a) Arătați că $f'(x) = \frac{x^2(x^2 + 3)}{(x^2 + 1)^2}$, $x \in \mathbb{R}$.
- 5p** b) Determinați ecuația asimptotei oblice spre $+\infty$ la graficul funcției f .
- 5p** c) Arătați că funcția f este bijectivă.
2. Fie funcția $f: (-1; \infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{2(2x-1)}{x+1}$.
- 5p** a) Determinați numerele reale a, b pentru care funcția $F: (-1; \infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $F(x) = ax + b \ln(1+x)$ este o primitivă a funcției f .
- 5p** b) Determinați $\int f(x) dx$, $x \in (-1; +\infty)$.
- 5p** c) Determinați primitiva $G: (-1; +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ a funcției $g: (-1; +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $g(x) = (x+1) \cdot f(x) + e^{2x} + \sin x$ pentru care $G(0) = 0$.

Examenului național de Bacalaureat 2026
Proba E. c)
Matematică M_{șt-nat}
BAREM DE EVALUARE ȘI DE NOTARE

Simulare

Filiera teoretică, profilul real, specializarea științe ale naturii

- Pentru orice soluție corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.
- Nu se acordă fracțiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parțiale, în limitele punctajului indicat în barem.
- Se acordă zece puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărțirea la zece a punctajului total acordat pentru lucrare.

SUBIECTUL I

(30 de puncte)

1.	$A = \log_3 27 + \log_{\frac{1}{2}} \frac{1}{16} + \sqrt[3]{125} = \log_3 3^3 + \log_{\frac{1}{2}} \left(\frac{1}{2}\right)^4 + \sqrt[3]{5^3} =$ $= 3 + 4 + 5 = 12; 12 \in \mathbb{N}$	2p 3p
2.	$a = 6; a > 0 \Rightarrow f_{\min} = -\frac{\Delta}{4a} =$ $= -\frac{b^2 - 4ac}{4a} = \frac{92}{24} = \frac{23}{6}$	2p 3p
3.	Notăm $5^x = t > 0$ și obținem ecuația echivalentă $t^2 + 3t - 4 = 0$ cu soluțiile $t_1 = -4$, $t_2 = 1$. Convine doar $t_2 = 1$ $5^x = 1 \Leftrightarrow x = 0$	3p 2p
4.	Mulțimea dată are un număr de 100 elemente din care doar 10 numere raționale ($\sqrt{0^2}, \sqrt{1^2}, \sqrt{2^2}, \dots, \sqrt{9^2}$), adică 90 numere iraționale. $P = \frac{\text{nr. cazuri favorabile}}{\text{nr. cazuri posibile}} = \frac{90}{100} = \frac{9}{10}.$	3p 2p
5.	$AC \perp BD \Leftrightarrow m_{AC} \cdot m_{BD} = -1.$ $-4 \cdot \frac{3}{a+1} = -1 \Leftrightarrow -12 = -a - 1 \Leftrightarrow a = 11.$	2p 3p
6.	$\operatorname{tg}\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\operatorname{tg} x + \operatorname{tg} \frac{\pi}{4}}{1 - \operatorname{tg} x \cdot \operatorname{tg} \frac{\pi}{4}} =$ $= \frac{\frac{1}{3} + 1}{1 - \frac{1}{3}} = \frac{\frac{4}{3}}{\frac{2}{3}} = 2$	2p 3p

SUBIECTUL al II – lea

(30 de puncte)

1.a)	$\det A(a) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & a \\ 1 & 9 & a^2 \end{vmatrix} = (a-3)(a-1)(3-1) = 2(a-3)(a-1)$ $\det A(2) = 2 \cdot (-1) \cdot 1 = -2.$	3p 2p
b)	A este inversabilă $\Leftrightarrow \det A \neq 0$ $(a-3)(a-1) \neq 0 \Leftrightarrow a \in \mathbb{R} - \{1; 3\}$	2p 3p
c)	Pentru $a \in \mathbb{R} - \{1; 3\}$ avem $\det A \neq 0 \Leftrightarrow$ sistemul dat este un sistem compatibil determinat.	2p

	Soluția sistemului este $S = \{(1; 0; 0)\}$	3p
2.a)	$x * y = xy - 4x - 4y + 20 = xy - 4x - 4y + 16 + 4 = (x - 4)(y - 4) + 4$, pentru orice numere întregi x și y .	2p 3p
b)	$x * y = y * x$, pentru orice $x, y \in \mathbb{Z}$ $e \in \mathbb{Z}$ element neutru, dacă $x * e = e * x = x$, $\forall x \in \mathbb{Z}$, de unde se obține că $e = 5 \in \mathbb{Z}$ $U(\mathbb{Z}) = \{x \in \mathbb{Z}, \exists x' \in \mathbb{Z} \text{ astfel încât } x * x' = x' * x = 5\}$ Pentru $x \in \mathbb{Z} - \{4\}$ avem $x' = \frac{1}{x-4} + 4$. $x' \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow \frac{1}{x-4} \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow x - 4 \in \{-1; 1\}$, deci $U(\mathbb{Z}) = \{3; 5\}$	2p 3p
c)	Se demonstrează că $x * 4 = 4 * x = 4$, $\forall x \in \mathbb{Z}$ și, folosind asociativitatea, obținem $[(-2026) * (-2025) * \dots * 3] * 4 * [5 * \dots * 2025 * 2026] = 4$.	2p 3p
SUBIECTUL al III – lea (30 de puncte)		
1.a)	$f'(x) = \left(\frac{x^3 + x^2 + 1}{x^2 + 1} \right)' = \frac{(3x^2 + 2x)(x^2 + 1) - (x^3 + x^2 + 1)(2x)}{(x^2 + 1)^2} =$ $= \frac{x^4 + 3x^2}{(x^2 + 1)^2} = \frac{x^2(x^2 + 3)}{(x^2 + 1)^2}$, $x \in \mathbb{R}$.	3p 2p
b)	$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3 + x^2 + 1}{x^3 + x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3 \left(1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^3} \right)}{x^3 \left(1 + \frac{1}{x^2} \right)} = 1, m = 1$ $\lim_{x \rightarrow \infty} (f(x) - m \cdot x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^3 + x^2 + 1}{x^2 + 1} - x \right) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 - x + 1}{x^2 + 1} = 1, n = 1$ Dreapta de ecuație $y = x + 1$ este asimptotă oblică spre $+\infty$.	2p 3p
c)	$f'(x) \geq 0, \forall x \in \mathbb{R}$ Cum mulțimea soluțiilor ecuației $f'(x) = 0$ este $S = \{0\}$, care nu formează interval, obținem că funcția f este strict crescătoare pe $\mathbb{R}$, ceea ce înseamnă că f este injectivă. $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty, \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$, f este funcție continuă, de unde obținem că funcția f este surjectivă, deci f este o funcție bijectivă pe $\mathbb{R}$.	2p 3p
2.a)	Funcția F este derivabilă pe $(-1, +\infty)$ și $F'(x) = f(x), \forall x \in (-1, +\infty)$. $F'(x) = a + \frac{b}{x+1} = \frac{ax + a + b}{x+1}, \forall x \in (-1, +\infty)$. $\frac{2(2x-1)}{x+1} = \frac{ax+a+b}{x+1}, \forall x \in (-1, +\infty)$, de unde obținem $a = 4, b = -6$	2p 3p
b)	Din a) obținem că $F(x) = 4x - 6 \ln(1+x)$ este o primitivă a lui f $\int f(x) dx = 4x - 6 \ln(1+x) + C, x \in (-1, +\infty)$.	2p 3p
c)	$g(x) = (x+1) \cdot f(x) + e^{2x} + \sin x = 4x - 2 + e^{2x} + \sin x$, care este continuă pe $(-1, +\infty)$, deci g admite primitive pe $(-1, +\infty)$. $\int (4x - 2 + e^{2x} + \sin x) dx = 2x^2 - 2x + \frac{e^{2x}}{2} - \cos x + C$. Din $G(0) = 0$ obținem că $c = \frac{1}{2}$ și $G(x) = 2x^2 - 2x + \frac{e^{2x}}{2} - \cos x + \frac{1}{2}$.	2p 3p