

EXAMENUL DE BACALAUREAT - 2026

Simulare județeană

Proba E. c)

Matematică M_mate-info

*Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică-informatică**Filiera vocațională, profilul militar, specializarea matematică-informatică*

- Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă zece puncte din oficiu.
- Timpul de lucru efectiv este de trei ore.

SUBIECTUL I

(30 puncte)

- 5p 1. Demonstrați egalitatea $i^{2026} = \log_2 0,5$.
- 5p 2. Fie x_1 și x_2 rădăcinile ecuației $x^2 - 3x - 2 = 0$. Demonstrați că $x_1^2 + x_2^2 < \sqrt{170}$.
- 5p 3. Rezolvați în $\mathbb{R}$ ecuația $9^x - 2 \cdot 3^x - 3 = 0$.
- 5p 4. Determinați probabilitatea ca o submulțime a mulțimii $\mathcal{A} = \{a, b, c, d, e, f, g\}$ să conțină cel puțin 5 elemente.
- 5p 5. În sistemul xOy considerăm punctele $A(2,3)$, $B(5,1)$ și $C(3,-5)$. Determinați lungimea medianei care pornește din punctul A în triunghiul ABC .
- 5p 6. Fie $x, y \in \left(0, \frac{\pi}{4}\right)$. Demonstrați egalitatea $\frac{\sin(x+y) + \sin(x-y)}{\cos(x+y) + \cos(x-y)} = \operatorname{tg} x$.

SUBIECTUL II

(30 puncte)

1. Considerăm mulțimea $\mathcal{A} = \left\{ \begin{pmatrix} a & 0 & b \\ 0 & 1 & 0 \\ -b & 0 & a \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R}) \mid a^2 + b^2 = 1 \right\}$.
- 5p a) Demonstrați că matricea $\begin{pmatrix} \frac{3}{5} & 0 & \frac{4}{5} \\ 0 & 1 & 0 \\ -\frac{4}{5} & 0 & \frac{3}{5} \end{pmatrix}$ aparține mulțimii $\mathcal{A}$.
- 5p b) Demonstrați că, oricare ar fi matricele $U, V \in \mathcal{A}$, avem $U \cdot V \in \mathcal{A}$.
- 5p c) Demonstrați că, oricare ar fi matricea $U \in \mathcal{A}$ avem $U^{-1} \in \mathcal{A}$.
2. Pe mulțimea $M = [0, \infty)$ considerăm operația " $\oplus$ " definită prin $x \oplus y = x + 9y - 6\sqrt{xy}$, oricare ar fi $x, y \geq 0$.
- 5p a) Demonstrați că $4 \oplus 9 = 49$.
- 5p b) Rezolvați în mulțimea M ecuația $x \oplus 1 = 10$.
- 5p c) Studiați dacă operația " $\oplus$ " admite element neutru.

SUBIECTUL III

(30 puncte)

1. Considerăm funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \sqrt{x^2 - 4x + 5}$.
- 5p a) Demonstrați că ecuația $f'(x) = 0$ admite o singură soluție reală.
- 5p b) Determinați intervalele de monotonie ale funcției f .
- 5p c) Demonstrați că $f(1,99) + f(2,01) < f(1,97) + f(2,03)$.
2. Fie funcțiile $f, g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, definite prin $f(x) = x \cos x + \sin x$ și $g(x) = x \sin x$.
- 5p a) Demonstrați că funcția g este o primitivă a funcției f .
- 5p b) Calculați $\int_1^{\frac{\pi}{2}} f(x) \ln x \, dx$.
- 5p c) Calculați $\int_1^{\sqrt{\frac{\pi}{2}}} x f(x^2) \ln x \, dx$.

BAREM DE EVALUARE ȘI DE NOTARE

Simulare județeană

Proba E. c) Matematică M_mate-info

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică-informatică

Filiera vocațională, profilul militar, specializarea matematică-informatică

- Pentru orice soluție corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.
- Nu se acordă fracțiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parțiale, în limitele punctajului indicat în barem.
- Se acordă zece puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărțirea la zece a punctajului total acordat pentru lucrare.

SUBIECTUL I

(30 puncte)

1.	Avem $i^{2026} = (i^2)^{1013} = (-1)^{1013} = -1$ și $\log_2 0,5 = \log_2 \frac{1}{2} = -1$ de unde obținem concluzia.	2p 3p
2.	$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} = 3, x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a} = -2$ Avem $x_1^2 + x_2^2 = (x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2 = 3^2 - 2(-2) =$ $= 13 = \sqrt{169} < \sqrt{170}.$	3p 2p
3.	Notația $3^x = t$ conduce la ecuația $t^2 - 2 \cdot t - 3 = 0$ cu soluțiile $t_1 = -1$ și $t_2 = 3$. Condiția $3^x > 0$ conduce la $3^x = 3$ cu soluția $x = 1$.	3p 2p
4.	Numărul de cazuri posibile este $2^7 = 128$ și numărul de cazuri favorabile este $C_7^5 + C_7^6 + C_7^7 = 21 + 7 + 1 = 29$, deci probabilitatea este egală cu $\frac{29}{128}$.	2p 2p 1p
5.	Dacă M este mijlocul laturii BC , atunci $x_M = \frac{5+3}{2} = 4$ și $y_M = \frac{1-5}{2} = -2$. Aplicând formula distanței obținem $AM = \sqrt{(2-4)^2 + (3+2)^2} = \sqrt{29}$	2p 3p
6.	Avem $\frac{\sin(x+y)+\sin(x-y)}{\cos(x+y)+\cos(x-y)} = \frac{\sin x \cos y + \sin y \cos x + \sin x \cos y - \sin y \cos x}{\cos x \cos y - \sin x \sin y + \cos x \cos y + \sin x \sin y} =$ $= \frac{2 \sin x \cos y}{2 \cos x \cos y} = \operatorname{tg} x.$	2p 3p

SUBIECTUL II

(30 puncte)

1. a)	Matricea din enunț are forma elementelor din $\mathcal{A}$. În plus $\left(\frac{3}{5}\right)^2 + \left(\frac{4}{5}\right)^2 = 1$, ceea ce conduce la concluzie.	1p 4p
1. b)	Fie $U = \begin{pmatrix} a & 0 & b \\ 0 & 1 & 0 \\ -b & 0 & a \end{pmatrix}$ cu $a^2 + b^2 = 1$ și $V = \begin{pmatrix} c & 0 & d \\ 0 & 1 & 0 \\ -d & 0 & c \end{pmatrix}$ cu $c^2 + d^2 = 1$. Obținem $UV = \begin{pmatrix} ac - bd & 0 & ad + bc \\ 0 & 1 & 0 \\ -ad - bc & 0 & ac - bd \end{pmatrix}$, deci o matrice de aceeași formă. Apoi $(ac - bd)^2 + (ad + bc)^2 = (a^2 + b^2)(c^2 + d^2) = 1$, ceea ce conduce la concluzie.	1p 2p 2p

1. c)	Dacă $U = \begin{pmatrix} a & 0 & b \\ 0 & 1 & 0 \\ -b & 0 & a \end{pmatrix}$ atunci se obține $U^{-1} = \begin{pmatrix} a & 0 & -b \\ 0 & 1 & 0 \\ b & 0 & a \end{pmatrix}$. Concluzia se obține deoarece $a^2 + (-b)^2 = 1 \Rightarrow U^{-1} \in \mathcal{A}$.	3p 2p
2. a)	Verificare prin calcul direct: $4 \oplus 9 = 4 + 9 \cdot 9 - 6\sqrt{4 \cdot 9} =$ $= 85 - 36 = 49$	2p 3p
2. b)	Avem $x \oplus 1 = (\sqrt{x} - 3)^2 = 10$ de unde obținem $\sqrt{x} - 3 = -\sqrt{10}$ sau $\sqrt{x} - 3 = \sqrt{10}$ Ecuația $\sqrt{x} = 3 - \sqrt{10} < 0$ nu are soluție în M , rezultă $x = 19 + 6\sqrt{10} \in M$	3p 2p
2. c)	$\exists e \in M$ a.î. $x \oplus e = e \oplus x = x, \forall x \in M$ Notând cu $e \in M$ eventualul element neutru, din relația $x \oplus e = x$ conduce la $e = 0 \in M$. Dar $0 \oplus x = 9x$, deci nu există element neutru.	2p 2p 1p

SUBIECTUL III

(30 puncte)

1. a)	Avem $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x^2-4x+5}} \cdot (x^2 - 4x + 5)' = \frac{x-2}{\sqrt{x^2-4x+5}}$. Ecuația $f'(x) = 0$ conduce la $x - 2 = 0$ cu unica soluție reală $x = 2$.	3p 2p
1. b)	Tabelul de variație al funcției f conduce la concluzia că $f'(x) < 0$ când $x < 2$ și $f'(x) > 0$ pentru $x > 2$. Rezultă că f este strict descrescătoare pe intervalul $(-\infty, 2)$ și strict crescătoare pe intervalul $(2, +\infty)$.	3p 2p
1. c)	Din monotonia funcției f deducem că $f(1,99) < f(1,97)$ și $f(2,01) < f(2,03)$. Concluzia se obține prin însumarea celor două inegalități.	2p 3p
2. a)	Avem $g'(x) = (x \sin x)' = (x)' \sin x + x(\sin x)' =$ $= \sin x + x \cos x = f(x)$, de unde obținem concluzia.	3p 2p
2. b)	Folosind metoda integrării prin părți cu alegerea $u'(x) = f(x)$ și $v(x) = \ln x$, cu continuarea $u(x) = g(x)$ și $v'(x) = \frac{1}{x}$, obținem $\int_1^{\frac{\pi}{2}} f(x) \ln x \, dx = x \sin x \ln x \Big _1^{\pi/2} - \int_1^{\pi/2} \sin x \, dx = \frac{\pi}{2} \ln \frac{\pi}{2} + \cos x \Big _1^{\pi/2} =$ $= \frac{\pi}{2} \ln \frac{\pi}{2} - \cos 1.$	2p 3p
2. c)	Avem $\int_1^{\sqrt{\frac{\pi}{2}}} x f(x^2) \ln x \, dx = \frac{1}{4} \int_1^{\sqrt{\frac{\pi}{2}}} 2x f(x^2) \ln x^2 \, dx$. Schimbarea de variabilă $x^2 = t$ conduce la $\frac{1}{4} \int_1^{\frac{\pi}{2}} f(t) \ln t \, dt = \frac{1}{4} \left(\frac{\pi}{2} \ln \frac{\pi}{2} - \cos 1 \right).$	1p 4p